Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală – Maramureş - Clasa a VII – a

SOLUŢII ŞI BAREM DE CORECTARE varianta 1

1. a) Să se calculeze $[S]$***, unde*** $S=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{5\cdot 2^{n-2}}$***,*** $n\in N^*$***, unde*** $[x]$ ***reprezintă partea întreagă a numărului*** x***.***

Soluţie: $S=\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+...+2+1}{5\cdot 2^{n-2}}$ (1 p)

$S=\frac{2^n-1}{5\cdot 2^{n-2}}$ (1 p)

$2^n-1<2^n=2^2\cdot 2^{n-2}=4\cdot 2^{n-2}<5\cdot 2^{n-2}$ (1 p)

$0<S<1 \Rightarrow [S]=0$. (1 p)

b) Fie mulţimea $\{x_1;x_2;x_3;x_4;...;x_{2015}\}=\{1;2;3;4;...;2015\}$***. Arătaţi că printre numerele*** $|x_1-1|;|x_2-2|;|x_3-3|;...;|x_{2015}-2015|$ ***există cel puţin două numere egale.***

Soluţie: $0\le |x_i-i|\le 2014$ (0,5 p)

Dacă toate numerele sunt diferite avem suma

$S=|x_1-1|+|x_2-2|+|x_3-3|+...+|x_{2015}-2015|=0+1+2+3+...+2014=1007\cdot 2015$ (0,5 p)

Dar $S=\pm x_1\pm x_2\pm...\pm x_{2015}\pm 1\pm 2\pm 3\pm...\pm 2015=$

$=\pm 1\pm 2\pm 3\pm...\pm 2015\pm 1\pm 2\pm 3\pm...\pm 2015$ este număr par. (1,5 p)

Concluzia: presupunerea "toate numerele sunt diferite" este falsă. (0,5 p)

2 . Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^2y-2x=3y-1$***.***

Soluţie. Ecuaţia se poate scrie sub forma $y(x^2-3)=2x-1$. (1,5 p)

Obţinem $y=\frac{2x-1}{x^2-3}\in Z$ deci $x^2-3/2x-1$. **(1)** (1 p)

Din (1) şi x^2-3/x^2-3 avem $x^2-3/2x^2-x$ şi $x^2-3/2x^2-6$, deci $x^2-3/x-6$. **(2)** (1 p)

Din **(1)** şi **(2)** deducem $x^2-3/11$. (1 p)

Rezultă $x^2-3\in D_{11}=\{-11;-1;1;11\}$. (0,5 p)

Aşadar $x^2\in\{-8;2;4;14\}$ şi convine doar $x^2=4$. (1 p)

Soluţia este $(x;y)\in\{(-2;-5);(2;3)\}$. (1 p)

3. Se consideră triunghiul ABC, $m(\angle A)=90°$, D simetricul punctului C față de A, $CE \perp BD$, $E \in BD$ și $AB \cap CE = \{F\}$. Știind că $AE \parallel BC$, iar paralela prin F la BD intersectează $[BC]$ în P și CD în Q să se arate că: a) $m(\angle C)=2\cdot m(\angle B)$; b) $\frac{2}{3}\cdot BC < PE + EQ < BC$.

<u>Soluție</u>.

a) Desen *a)*. (0,5 p)

BA mediatoarea lui $[CD]$, deci ΔBCD isoscel: $BD = BC$. (0,5 p)

A – mijlocul lui (CD) și $AE \parallel BC$, deci (AE) linie mijlocie. (1 p)

(CE) mediană și înălțime, deci ΔBCD isoscel: $CD = BC$. (0,5 p)

Obținem ΔBCD echilateral. (0,5 p)

Așadar $m(\angle ACB)=60°$, deci $m(\angle ABC)=30°$ și concluzia. (0,5 p)

b) Completare desen pentru *b)* . (0,5 p)

$PQ = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}BC$. (0,5 p)

În ΔEPQ: $EP + EQ > PQ$. (0,5 p)

$\frac{2}{3}BC < EP + EQ$. (0,5 p)

Din $\Delta BEP \equiv \Delta DEQ$ avem $EQ = EP$. (0,5 p)

$EQ < AE = \frac{BC}{2}$. (0,5 p)

Finalizare. (0,5 p)

4. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului oarecare ABC se construiesc în exteriorul triunghiului ABC triunghiurile echilaterale ABD şi ACE. Dacă M, N şi P sunt mijloacele segmentelor (AD), (BC), respectiv (AE) arătaţi că triunghiul MNP este echilateral.

<u>Soluţie</u>.

Desen. (0,5 p)

Fie R mijlocul lui (AB) şi Q mijlocul lui (AC) (1 p)

$ARNQ$ este paralelogram. (1 p)

$MR=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}BA=AR=NQ$ şi $PQ=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}AC=AQ=NR$. (1 p)

$m(\angle ARM)=60°=m(\angle AQP)$ şi

$\angle ARN\equiv\angle AQN$, (1 p)

deci $\angle MRN\equiv\angle PQN$.

Obţinem $\Delta MRN\equiv\Delta NQP$ (LUL), de unde $[MN]\equiv[PN]$,

aşadar ΔMNP este isoscel. (0,5 p)

$m(\angle MNP)=m(\angle RNQ)-[m(\angle RNM)+m(\angle PNQ)]=$ (0,5 p)

$=180°-m(\angle ARN)-[m(\angle RNM)+m(\angle RMN)]=$ (0,5 p)

$=180°-[m(\angle RNM)+m(\angle RMN)]-m(\angle ARN)=$

$=m(\angle MRM)-m(\angle ARN)=m(\angle ARM)=60°$ (0,5 p)

Finalizare: ΔMNP echilateral. (0,5 p)

NOTĂ. Acest barem este orientativ.

Se vor puncta corespunzător orice alte soluţii corecte.